OPTION P' - 1ÈRE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

- L'énoncé de cette épreuve particulière aux candidats de l'option P' comporte 2 pages -

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

NOTATIONS ET DEFINITIONS

0.1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, g une application de I dans $\mathbb{R}$, h une application de I dans I, p un entier naturel, a un point de I.

- g est dite de classe C^p si : $\begin{cases} p > 0, \text{ et g est p fois continûment dérivable sur I.} \\ p = 0, \text{ et g est continue sur I.} \end{cases}$
- a est dit point fixe de g si : $g(a) = a$.
- la notation $h^{(p)}$ désigne ici :

$\begin{cases} \text{l'application } hoh \ldots . oh \text{ (composée p fois de h), si } p > 0. \\ \text{l'application } x \to x \text{ de I dans I, si } p = 0. \end{cases}$

0.2. On désigne par E l'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ des applications continues du segment [0,1] de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^0.

On désigne par Φ l'ensemble des applications continues de [0,1] dans lui-même.

On désigne par Ψ_0 l'ensemble des applications ψ de [0,1] dans $\mathbb{R}$, de classe C^0, strictement croissantes, et telles que : $\psi(0) = 0$; $\psi(1) = 1$.

On désigne par Ψ_1 la partie de Ψ_0 formée des applications de classe C^1.

0.3. Si f est un élément de E, ϕ est un élément de Φ, n un entier naturel, on pose :

$$T_{n,\phi}(f) = \int_0^1 f(\phi^{(n)}(x))dx.$$

0.4. On rappelle que 0 est un réel positif.

PARTIE I

On considère un élément ϕ de Φ.

I.1. Montrer que ϕ possède au moins un point fixe.

I.2. On suppose qu'il existe un réel k élément de]0,1[tel que : $(\forall x \in [0,1])\ (\phi(x) \leq kx)$.

Montrer que l'on a, pour tout élément f de E : $\lim_{n \to +\infty} T_{n,\phi}(f) = f(0)$.

I.3. On suppose que ϕ est de classe C^1 et vérifie : $(\forall x \in [0,1])\ (|\phi'(x)| < 1)$.

Montrer qu'il existe, et de façon unique, un réel a, élément de [0,1], tel que l'on ait pour tout élément f de E : $\lim_{n \to +\infty} T_{n,\phi}(f) = f(a)$

I.4. Soient N un entier naturel, $a_0, \ldots, a_N$ des points de $[0,1]$ vérifiant : $0 \leqslant a_0 < \ldots < a_N \leqslant 1$. On suppose que ϕ est strictement croissante, et que $a_0, \ldots, a_N$ sont les points fixes de ϕ.

Montrer que, pour tout élément f de E, la suite $T_{n,\phi}(f)$ est convergente, et déterminer sa limite, en fonction de f et de $a_0, \ldots, a_N$, dans les deux cas suivants :

(i) $(\forall\, x \in [0,1])\ (\phi(x) \geqslant x)$.

(ii) $(\forall\, x \in [0,1])\ (\phi(x) \leqslant x)$.

PARTIE II

II.1. Montrer que l'application : $f \to \sup_{\psi \in \Psi_0} T_{1,\psi}(|f|)$ de E dans l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des réels positifs (justifier) est une norme sur E.

[On rappelle que $|f|$ désigne l'application : $x \to |f(x)|$].

Montrer, pour tout élément f de E, l'égalité : $\sup_{\psi \in \Psi_0} T_{1,\psi}(|f|) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

II.2. Soient x_0 un élément de $]0,1[$, ε un élément de $]0,\frac{1}{2}[$, η un élément de $]0, \inf(x_0, 1-x_0)[$. Montrer qu'il existe un élément ψ de Ψ_1 qui vérifie :

$\psi(\varepsilon) = x_0 - \eta$, $\psi(1-\varepsilon) = x_0 + \eta$, $(\forall\, x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon])\ (|\psi(x) - x_0| \leqslant \eta)$.

II.3. Déduire de ce qui précède que l'on a, pour tout élément f de E :

$\sup_{\psi \in \Psi_1} T_{1,\psi}(|f|) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

PARTIE III

Dans cette partie, on s'intéresse au cas suivant : ψ est l'application : $x \to tx$ de $[0,1]$ dans lui-même, où t est un paramètre élément de $[0,1]$.

III.1. Soit f un élément de E. Montrer que l'application : $t \to \int_0^1 f(tx)\,dx$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ appartient à E. On la note u(f), et l'on définit ainsi une application $u : f \to u(f)$ de E dans lui-même. Montrer que u est un endomorphisme (vectoriel) de E, injectif, mais non surjectif.

III.2. Démontrer que les fonctions propres de l'endomorphisme u sont exactement les applications $x \to \alpha x^{\beta}$, où α est un réel, et β un réel positif.

III.3. Retrouver directement, sans utiliser ce qui précède, que l'on a pour tout t fixé dans $[0,1[$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t^n x)\,dx = f(0)$$

° ° °

I.4. Soient N un entier naturel, $a_0, \ldots, a_N$ des points de $[0,1]$ vérifiant : $0 \leqslant a_0 < \ldots < a_N \leqslant 1$. On suppose que ϕ est strictement croissante, et que $a_0, \ldots, a_N$ sont les points fixes de ϕ.

Montrer que, pour tout élément f de E, la suite $T_{n,\phi}(f)$ est convergente, et déterminer sa limite, en fonction de f et de $a_0, \ldots, a_N$, dans les deux cas suivants :

(i) $(\forall\, x \in [0,1])\ (\phi(x) \geqslant x)$.

(ii) $(\forall\, x \in [0,1])\ (\phi(x) \leqslant x)$.

PARTIE II

II.1. Montrer que l'application : $f \to \sup_{\psi \in \Psi_0} T_{1,\psi}(|f|)$ de E dans l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des réels positifs (justifier) est une norme sur E.

[On rappelle que $|f|$ désigne l'application : $x \to |f(x)|$].

Montrer, pour tout élément f de E, l'égalité : $\sup_{\psi \in \Psi_0} T_{1,\psi}(|f|) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

II.2. Soient x_0 un élément de $]0,1[$, ε un élément de $]0,\frac{1}{2}[$, η un élément de $]0, \inf(x_0, 1-x_0)[$. Montrer qu'il existe un élément ψ de Ψ_1 qui vérifie :

$\psi(\varepsilon) = x_0 - \eta$, $\psi(1-\varepsilon) = x_0 + \eta$, $(\forall\, x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon])\ (|\psi(x) - x_0| \leqslant \eta)$.

II.3. Déduire de ce qui précède que l'on a, pour tout élément f de E :

$\sup_{\psi \in \Psi_1} T_{1,\psi}(|f|) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

PARTIE III

Dans cette partie, on s'intéresse au cas suivant : ψ est l'application : $x \to tx$ de $[0,1]$ dans lui-même, où t est un paramètre élément de $[0,1]$.

III.1. Soit f un élément de E. Montrer que l'application : $t \to \int_0^1 f(tx)\,dx$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ appartient à E. On la note u (f), et l'on définit ainsi une application u : $f \to u(f)$ de E dans lui-même. Montrer que u est un endomorphisme (vectoriel) de E, injectif, mais non surjectif.

III.2. Démontrer que les fonctions propres de l'endomorphisme u sont exactement les applications : $x \to \alpha x^{\beta}$, où α est un réel, et β un réel positif.

III.3. Retrouver directement, sans utiliser ce qui précède, que l'on a pour tout t fixé dans $[0,1[$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t^n x)\,dx = f(0)$$

° ° °

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail